



მაგიდა № 18

25.04.2015/ მათ/III/ 605

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

სულ ვვაქვს სამი შემთხვევა: 1) $0 < a < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq b < 1$ 2) $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$,
3) $\frac{1}{2} \leq a < 1$, $\frac{1}{2} \leq b < 1$. ვნვიხილთ პირველ შემთხვევაში. $a_0 = a$, $b_0 = b$.
 $a_1 = f(a_0) = a_0 + \frac{1}{2}$, $b_1 = f(b_0) = b_0^2$. ჩავვათ უტყობებში (ავიღოთ $n=1$).
 $(a_1 - a_0)(b_1 - b_0) < 0$ $\frac{1}{2}(b_0^2 - b_0) < 0$. $b_0^2 - b_0 < 0$ $b_0^2 < b_0$. ხოლო ხან
 $b_0 > 0$, ვამრის, რომ $b_0^2 < b_0 \Rightarrow b_0 < 1$. ეს ავიტყვე აცხადებს. შესაძლოა
პირველ შემთხვევაში $n=1$ -ისთვის ამოცანა ამოხსნის. ვნვიხილთ მეორე და
მესამე შემთხვევაში. შევნიშნათ, რომ ეს იმისთვის შეეძლება (მეორე შემთხვევაში)
ვიკონა ვესაძლებ შემთხვევაში, სეგან აუ $0 < a < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2} < 1$.
ხან ივსე b -ისთვის. დავივიტყვე, სძირნობ იმისთვის შევვიტყვე ~~შევიტყვე~~
მესამე შემთხვევიდან $2-2$ შემთხვევაში ვიქცევა. ვშვივნიხილთ მეორე და
მესამე შემთხვევაში იხარ, სივსე მეორე შემთხვევაში. შესაძლოა, ავიღოთ
 $0 < a < \frac{1}{2}$ და $0 < b < \frac{1}{2}$. შევნიშნათ, რომ აუ ხანძი n -ისთვის პირველ შემთხვევაში
ვიკვიტყვე, ამოცანა ამოხსნის. ვაშ, ვიკვიტყვეთ სწინააღმდეგეთ. შესაძლოა,
ვიკვიტყვე $k \in \mathbb{Z}^+$ -ისთვის, აუ $f(a_k) = a_k + \frac{1}{2}$. ვაშ-ბ $f(b_k) = b_k + \frac{1}{2}$ და აუ
 $f(a_k) = a_k^2$ ვაშ-ბ $f(b_k) = b_k^2$. შევნიშნათ, რომ აუ $b_k > a_k$. ვაშ-ბ
 $b_{k+1} > a_{k+1}$ აუ $f(b_k) > f(a_k)$. ეს ვიხვიტყვეთ სიხვიტყვეთ, სეგან აუ
 $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}$ ვაშ-ბ $a_k + \frac{1}{2} < b_k + \frac{1}{2}$. სეგან $a_k < b_k$. ხოლო აუ $a_{k+1} = a_k^2$.
ვაშ-ბ $a_k < b_k$ ესეც სწინაა, სეგან $a_k < b_k$. ვიხვიტყვეთ ვი ვვაქვს ვიკვიტყვე
რომ $a < b$ აუ $a_0 < b_0$. შესაძლოა ვივნი ვაქვიტყვეთ სწინაა.
შევიტყვეთ ახარი, c ვიკვიტყვეთ. სეგან $c_1 = b_1 - a_1$. ვიხვიტყვეთ
 $n \in \mathbb{Z}^+$ -ისთვის. ხოლო $c_0 = b_0 - a_0$. $b_0 = b$, $a_0 = a$. $b > a$ აქედან
ვიკვიტყვეთ, რომ $c_0 > 0$.

1



მაგიდა № 18

25.04.2015/ მათ/III/ 605

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$7x^2 - 13xy + 7y^2 = (|x-y|+1)^3$. ვიჩვენებთ, რომ $x, y \equiv 0 \pmod{3}$ მაშინ
 შესებნა შესა იყოფა 3-ზე. მიჩვენებთ შესა $\equiv 1 \pmod{3}$ ვადაცა.
 ეს ნადა იძლევა. თუ $x, y \equiv 0 \pmod{7}$ მაშინ შესებნა
 შესა იყოფა 3-ზე, მიჩვენებთ $\equiv 1 \pmod{7}$. ნადაცა, თუ $x, y \equiv 0 \pmod{a}$
 შესებნა შესა იყოფა a-ზე, მიჩვენებთ $\equiv 1 \pmod{a}$ ვადაცა ნადაცა. აქედან
 ვიძღვრებთ, რომ x, y -ს უ.ს.გ. ახლ 1 ანუ $(x, y) = 1$. ანუ $x=y$,
 $x=-y$ შემთხვევებში $y = \pm 1, -1$ ვიძინებთ. მაშინ აქედან, რომ
 $(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$ შემთხვევებში ცოცხლ ვადაცა. ახლ \equiv
 ნადაცა შემთხვევებში ნადაცა.
 ვიძინებთ $x=0$. $7y^2 = (|y|+1)^3$. ვადაცა ვადაცა, რომ $7y^2 = (y+1)^3 =$
 $= y^3 + 1 + 3y^2 + 3y$ ანუ $y^3 + 1 + 3y = 4y^2$. შესებნა შესა ანუ, მიჩვენებთ \equiv
 ცოცხლ. ცოცხლ ან მიჩვენებთ. რადაცა $y < 0$ შემთხვევა. $7y^2 = (-y+1)^3 =$
 $-y^3 + 1 + 3y^2 - 3y$ $7y^2 = 1 + 3y^2 - 3y - y^3$ $1 - 3y - y^3 = 4y^2$. შესებნა შესა ანუ,
 მიჩვენებთ ცოცხლ. ანადაცა ვადაცა $y=0$ შემთხვევა-ცოცხლ. ანადაცა
 ანუ ვიძინებთ ანადაცა ვადაცა მიჩვენებთ. მიჩვენებთ, რომ ვიძინებთ x და
 y -სადაცა სიძინებთ. სიძინებთ და რომ ანუ ცოცხლ ვადაცა, სიძინებთ
 ანუ ცოცხლ მიჩვენებთ. მიჩვენებთ ანუ ანუ ვიძინებთ რადაცა, და
 მიჩვენებთ. ანუ -1 -ზე ვადაცა ვადაცა. $a-an$ ანუ ვიძინებთ
 $x-y$, $b-an$ $x+y$. $a = x-y$ $b = x+y$. $7x^2 - 13xy + 7y^2 = 7(x-y)^2 + xy$.
 $xy = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{b-a}{2}$ სიძინებთ $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{b-a}{2}$ $xy = \frac{b^2 - a^2}{4}$. $7a^2 + \frac{b^2 - a^2}{4} = (a-1)^3$
 ანუ ვადაცა, რომ $b^2 = 4(a-1)^3 - 7a^2$ $b^2 = 4a^3 - 4a^2 + 4a - 4 - 7a^2 =$
 $4(a^3 + a - 1) - 3a^2$. სიძინებთ ვიძინებთ სიძინებთ, თუ a და b -ს ანუ ცოცხლ
 ვადაცა, ცოცხლ ანუ ანუ მიჩვენებთ. ანუ $a^2 = 4(b-1)^3 - 7b^2$. სიძინებთ
 $7b^2 = 74(4(a-1)^3 - 7a^2)$ სიძინებთ და ანუ ვიძინებთ ვიძინებთ.

4



შოთა რუსთაველის ეროვნული
სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL
SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 18

25.04.2015/ მათ/III/ 605

ამოცანა №

გვერდი №

Large dashed rectangular area for the problem solution.